AKTIVNI FILTRI

1. ZADATAK: a) Odrediti Butterworth-ovu prenosnu funkciju NF filtra koji treba da zadovolji sledeće karakteristike: A_{max}=1 dB, A_{min}=35 dB, f_P=1000 *Hz*, f_S=3500 *Hz*;

b) odrediti slabljenje na 9000 Hz;

c) odrediti Q faktore polova funkcije pojačanja.

REŠENJE: a) Koeficijent ε dobija se polazeći od izraza za slabljenje filtra:

$$\alpha(\omega) = 20\log\left(\left|H(j\omega)\right|\right)^{-1} = 20\log\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)^{2n}}$$

Slabljenje je pri niskim frekvencijama 0 dB, a na granici propusnog opsega, tj. za $\omega = \omega_P$ je

$\alpha(\omega_p) = A_{max}$, odnosno $\alpha(\omega_p) = A_{max} = 10\log\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_P}{\omega_P}\right)^{2n}\right] = 10\log\left[1+\varepsilon^2\right]$.

Odavde je: $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1} = \sqrt{10^{0.1}-1} = 0.509$.

Na graničnoj frekvenciji nepropusnog opsega f_S mora biti zadovoljen uslov:

$$A_{min} = 10\log\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_S}{\omega_P}\right)^{2n}\right]$$

Red filtra **n** dobija se iz poslednja dva izraza u obliku:

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{10^{\frac{Amin}{10}}-1}{\varepsilon^2}\right]}{\log\left(\dfrac{\omega_S}{\omega_P}\right)^2} = \frac{\log\left[\dfrac{10^{3.5}-1}{0.509^2}\right]}{\log\left(\dfrac{3500}{1000}\right)^2} = \frac{4.086}{1.088} = 3.755 \ .$$

Mora se usvojiti najmanji celobrojni red filtra koji je veći od izračunatog a to je n=4.
Iz tabela za dati filtar i izračunati red filtra može se pronaći odgovarajuća prenosna filtra.
Normalizovano prenosna funkcija za n=4 iz tabele za Butterworthovu prenosnu funkciju NF filtra: $H_N = \dfrac{1}{(S^2+0.76536S+1)(S^2+1.84776S+1)}$

Do istog rezultata se može doći na drugi način. Polovi se mogu izračunati iz izraza:

$$S_k = \exp\left[j\frac{\pi}{2}\left(\frac{2k+n-1}{n}\right)\right],\ k = 1,2,...,2n \ .$$

U našem slučaju je: $S_k = \exp\left[j\frac{\pi}{2}\left(\frac{2k+3}{4}\right)\right],\ k = 1,2,...,8$.

S obzirom da polovi moraju biti samo u levoj poluravni *S*-ravni to su:

$$S_{1,2} = -\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \pm j\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -0.382683 \pm j0.92388$$

$$S_{3,4} = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \pm j\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.92388 \pm j0.382683$$

$$H(S) = \frac{1}{\prod_j^n\left(S-S_j\right)} = \frac{1}{(S+0.382683+j0.9238)\cdot(S+0.382683-j0.92388)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(S+0.92388+j0.382683)\cdot(S+0.92388-j0.382683)}$$

$$= \frac{1}{\left[(S+0.382683)^2+(0.923683)^2\right]\cdot\left[(S+0.92388)^2+(0.382683)^2\right]}$$

$$H(S) = \frac{1}{(S^2+0.76536S+1)(S^2+1.84776S+1)}$$

Denormalizaciju normalizovane prenosne funkcije treba izvršiti uvođenjem smene:

$$S \to s(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}{\omega_P}) = s\frac{\sqrt[4]{0.509}}{2\pi\cdot 1000} = s\cdot 1.3443\cdot 10^{-4}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s^2\cdot 1.3443^2\cdot 10^{-8}+0.76537\cdot 1.3443\cdot 10^{-4}\cdot s+1)\cdot(s^2\cdot 1.3443^2\cdot 10^{-8}+1.84776\cdot 1.3443\cdot 10^{-4}\cdot s+1)}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s^2\cdot 1.3443^2\cdot 10^{-8}+1.0289\cdot 10^{-4}\cdot s+1)\cdot(s^2\cdot 1.3443^2\cdot 10^{-8}+2.4839\cdot s+1)}$$

Ovaj filtar ima slabljenje na graničnoj frekvenciji nepropusnog opsega i iznosi:

$$\alpha(f_s) = 10\log\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_S}{\omega_P}\right)^{2n}\right] = 10\log\left[1+0.509^2\cdot(3.5)^8\right] = 37.66\text{dB}$$

b) Slabljenje na 9000 MHz iznosi:

$$\alpha(9000\,\text{Hz}) = 10\log[1+0.509^2(\frac{9000}{1000})^8] = 70.47\text{ dB}$$

c) Polinom drugog reda u imeniocu prenosne funkcije može se predstaviti u obliku:

$$s^2+\frac{\omega_P}{Q_P}\cdot s+\omega_p^2$$

Upoređivanjem izraza u imeniocu prenosne funkcije sa ovim dobija se:

$$\omega_{P1} = \sqrt{55335980}\quad,\quad \omega_{P2} = \sqrt{55335980}\ ,$$

odnosno $\omega_{P1} \approx 7438.81\,rad/s$ i $Q_{p1} = \frac{\omega_{P1}}{5693.5} = 1.3065$

$$\omega_{P2} \approx 7438.81\,rad/s \quad\text{i}\quad Q_{p2} = \frac{\omega_{P2}}{13745} = 0.5412\,.$$

2. ZADATAK: a) Naći Chebyshevljevu funkciju aproksimacije NF filtra sa sledećim karakteristikama: A_{max}=0,25 dB, A_{min}=40 dB, ω_P=1200 rad/s i ω_S=4000 rad/s.

b) Izračunati slabljenje na graničnoj frekvenciji nepropusnog opsega;

c) koliko može biti povećana širina propusnog opsega, a da ostale karakteristike i red filtra ostanu nepromenjeni?

REŠENJE: a) Moduo prenosne funkcije dat je izrazom:

$$|H(j\Omega)| = \left|\frac{V_0(j\Omega)}{V_{in}(j\Omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}}$$

$C_n(\Omega_n)$ predstavlja Chebyshevljev polinom prve vrste, koji pripada klasi ortogonalnih polinoma.

$$C_0(\Omega)=1,\ C_1(\Omega)=\Omega,\ldots,C_{n+1}=2\Omega\cdot C_n(\Omega)-C_{n-1}(\Omega).$$

Za $\omega=\omega_P \Rightarrow \Omega_P=1$ tako da je $A(\omega_P)=A_{max}=10\log(1+\varepsilon^2)$

Konstanta ε se dobija iz izraza: $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}}-1} = \sqrt{10^{\frac{0.25}{10}}-1} = 0.2434$

Normalizovana granična frekvencija nepropusnog opsega je:

$$\Omega_S=\frac{\omega_S}{\omega_P}=\frac{4000}{1200}=3.33\,,\quad g=\frac{\sqrt{10^{\frac{A_{\min}}{10}}-1}}{\varepsilon}=\frac{\sqrt{10^4-1}}{\varepsilon}=410.83$$

$$n=\frac{\log(g+\sqrt{g^2-1})}{\log(\Omega_S+\sqrt{\Omega_S^2-1})}=\frac{\log(410.83+\sqrt{410.83^2-1})}{\log(3.33+\sqrt{3.33^2-1})},\quad n=3.58\,.$$

Usvaja se n=4 jer red filtra mora biti najmanji ceo broj koji je veći od izračunatog.
Iz tabele za Chebyshev-ljevu prenosnu funkciju NF filtra se dobija:

$$H_N(S)=\frac{0.51352}{(S^2+0.42504S+1.16195)(S^2+1.02613S+0.45485)}$$

Denormalizacija se izvodi uvođenjem smene $S\to\frac{s}{\omega_P}=\frac{s}{1200}$, tako da je

$$H(s)=\frac{1200^4\cdot 0.51352}{(s^2+1200\cdot 0.42504s+1.16195\cdot 1200^2)(s^2+1200\cdot 1.02613s+0.45485\cdot 1200^2)}$$

$$H(s)=\frac{1.065\cdot 10^{12}}{(s^2+510s+167.32\cdot 10^4)(s^2+1231.35s+65.498\cdot 10^4)}$$

b) Slabljenje na graničnoj frekvenciji nepropusnog opsega iznosi:

$$\alpha(\omega_S)=10\log\left[1+\varepsilon^2\cdot C_n^2(\frac{\omega_S}{\omega_P})\right]=10\log\left[1+0.2434^2[8\cdot(\frac{\omega_S}{\omega_P})^4-8(\frac{\omega_S}{\omega_P})^2+1]^2\right]$$

$$=10\log\left[1+0.0592(899.73)^2\right]=46.81\ \text{dB}$$

c) $$A_{\min}=10\log\left[1+\varepsilon^2(8\Omega_S^4-8\Omega_S^2+1)^2\right]$$

$$10^{0.1A_{\min}}=1+\varepsilon^2(8\Omega_S^4-8\Omega_S^2+1)^2$$

$$\varepsilon(8\Omega_S^4-8\Omega_S^2+1)=\sqrt{10^{\frac{A\min}{10}}-1}$$

$$\Omega_S^4-\Omega_S^2+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{\frac{A\min}{}}-1})=0$$

$$\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{\frac{A\min}{10}}-1}}{8}=\frac{1-\frac{1}{0.2434}\sqrt{10^4-1}}{8}=-51.23$$

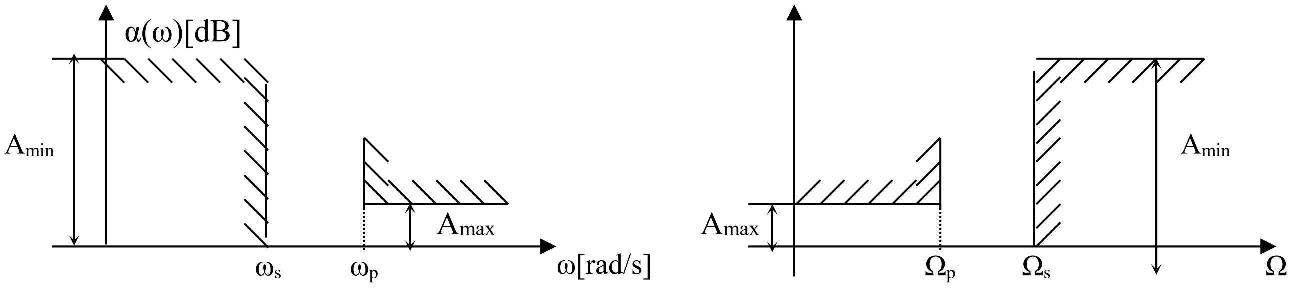
$$\Omega_S^4-\Omega_S^2-51.23=0\quad\Rightarrow\quad\Omega_S^2=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 51.23}}{2}=\frac{1\pm 14.35}{2}=7.67$$

$$\Omega_S^2=7.67\quad,\quad\Omega_S=2.77=\frac{\omega_S}{\omega_P'}\quad\Rightarrow\quad\omega_P'=\frac{\omega_S}{2.77}=\frac{4000}{2.77}=1444.04\ \text{rad/s}$$

Prema tome, red filtra propusnika frekvencija je dvostruko veći, tj. n=12.

14. ZADATAK: Projektovati VF filtar sa Chebyshevljevom prenosnom funkcijom koja zadovoljava sledeće zahteve: A_{max}=0.25dB, A_{min}=25dB, f_s=60Hz i f_p=300Hz.

RESENJE: U slučaju VF filtra najpre treba izvršiti frekvencijsku transformaciju tako da se za dati gabarit preslikava na sledeći način: $\Omega_p=1$ i $\Omega_s=\omega_p/\omega_s=f_p/f_s=300/60=5$.



$$g=\sqrt{\frac{10^{0.1A_{min}}-1}{10^{0.1A_{max}}-1}}=72.97 \qquad n=\frac{\log(g+\sqrt{g^2-1})}{\log(\Omega_s+\sqrt{\Omega_s^{\,2}-1})}=\frac{\log(145.93)}{\log(9.8989)}=2.17$$

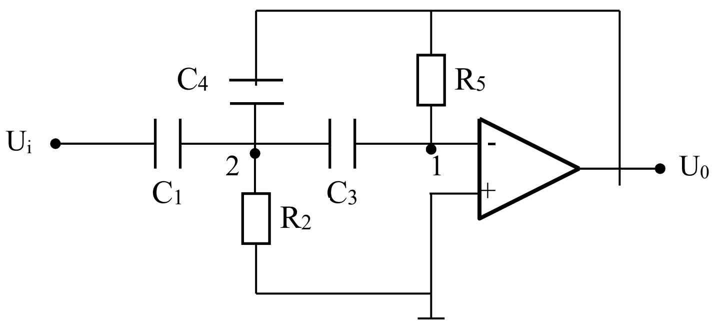
Izračunati red filtra n nije ceo broj te se on mora zaokružiti na prvi veći ceo broj, pa je n=3.
Iz tablice Chebyshevljevih aproksimacionih funkcija za prenosnu funkciju Chebyshevljevog NF prototipskog filtra se dobija:

$$H(S)=\frac{1.02702}{(S^2+0.76722S+1.33863)(S+0.76722)}$$

Prenosna funkcija VF filtra se dobija smenom:

$$S=\frac{\omega_p}{s}, \text{ odnosno } \quad H_{VF}(s)=H(S)\Big|_{S=\frac{\omega_p}{s}}$$

$$H_{VF}(s)=\underbrace{\frac{s^2}{2.65\cdot10^6+1079.79s+s^2}}_{sekcija\_II\_reda}\cdot\underbrace{\frac{4.072\cdot10^{-4}s}{1+4.072\cdot10^{-4}s}}_{sekcija\_I\_reda}$$



VF filtar II reda sa visestrukom povratnom spregom

1. $$-\frac{U_0}{R_5}-\frac{U_2}{\frac{1}{sC_3}}=0 \qquad \Rightarrow \qquad U_2=-\frac{U_0}{sC_3R_5}$$

2. $$-\frac{U_2}{R_2}+\frac{U_2-U_i}{\frac{1}{sC_1}}+\frac{U_2-U_0}{\frac{1}{sC_4}}+\frac{U_2}{\frac{1}{sC_3}}=0$$

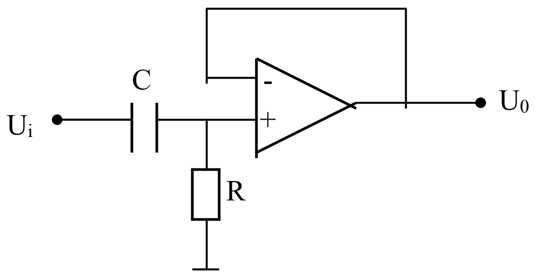
$$\Rightarrow U_0\left(-\frac{1}{sC_3R_2R_5}-\frac{C_1}{C_3R_5}-\frac{C_4}{R_5C_3}-sC_4-\frac{1}{R_5}\right)=sC_1U_i$$

$$H(s)=\frac{U_0(s)}{U_i(s)}=-\frac{s^2\dfrac{C_1}{C_4}}{s^2+\dfrac{s}{R_5}\left(\dfrac{C_1}{C_3C_4}+\dfrac{1}{C_3}+\dfrac{1}{C_4}\right)+\dfrac{1}{C_3C_4R_2R_5}}$$

Ako usvojimo da je $C_1=C_3=C=1\mu F$ tada je: $\frac{C_1}{C_4}=1 \quad\Rightarrow\quad C_1=C_4=1\mu F$.

Iz $\quad \frac{1}{R_5}\cdot\frac{3}{C}=1079.79 \quad\Rightarrow\quad R_5=2.778k\Omega$,

a iz $\quad \frac{1}{C_3C_4R_2R_5}=2.65\cdot 10^6 \quad\Rightarrow\quad R_2=135.83\Omega$



VF filtar I reda

Prenosna funkcija filtra prvog reda je $H(s)=\frac{sRC}{1+sRC}$.

Ako usvojimo R=10kΩ tada je: $RC=4.072\cdot 10^{-4} \quad\Rightarrow\quad C=40.72nF$.